

Kwantowa implementacja paradoksu Parrondo

Jarosław Miszczak

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN, Gliwice
oraz

Zakład Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Śląski, Katowice

7 Czerwca 2005

Plan wystąpienia

1. Motywacja
2. Paradoks Parrondo.
3. Realizacje kwantowe
4. Proponowana realizacja
5. Implementacja w języku QCL i symulacja

Motywacja

- ~> Opracowanie metod projektowanie algorytmów kwantowych
- ~> Implementacja w kwantowym języku programowania
- ~> Stworzenie realizacji paradoksu Parrondo z wykorzystanie jak najmniejszej liczby qubitów

Paradoks Parrondo (1)

W roku 1996 matematyk hiszpański J. M. R. Parrondo w nieopublikowanej pracy „*How to cheat a bad mathematician*”, zaproponował sposób tworzenia z dwóch przegrywających gier, gry o dodatniej wartości oczekiwanej.

Dane są dwie gry polegające na rzucie monetą. Wypadnięcie orła oznacza zysk 1 zł na konto gracza, a reszki stratę 1 zł. Zakłada się, że monety nie są symetryczne. Gracz ma prawo dowolnie wybierać w którą grę **A** lub **B** chce grać.

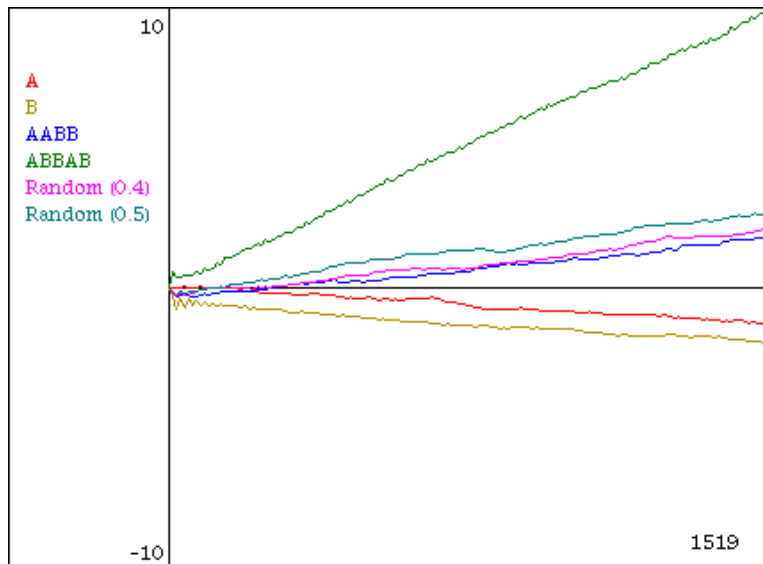
Każdy ciąg gier **A**, **B** nazywamy strategią gracza. W szczególności strategia może być dobierana losowo!

Celem gier jest zmaksymalizowanie stanu konta.

Paradoks Parrondo (2)

- Gra **A**: Rzucamy monetą taką, że prawdopodobieństwo wypadnięcia na niej orła wynosi $1/2 - \epsilon$.
- Gra **B**: Jeżeli stan konta jest podzielny przez 3, to rzucamy taką monetą B_1 , dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $1/10 - \epsilon$; w przeciwnym przypadku rzucamy monetą B_2 , dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $3/4 - \epsilon$, gdzie ϵ – jest małą liczbą rzeczywistą bliską 0.005.

Przykładowe strategie – symulacja



Parametry:

$$\epsilon = 0.005$$

$$P = 0.5$$

$$P_1 = 0.1$$

$$P_2 = 0.75$$

ilość gier: 150

prób 1500

Omówienie wyników

- Strategia „zawsze A” powoduje ujemną wartość oczekiwaną wygranej (gra jest przegrywająca),
- strategia „zawsze B” powoduje ujemną wartość oczekiwaną wygranej (gra przegrywająca B_1 jest rozgrywana częściej),
- strategie „AABB” i „ABBAB” dają dodatnią wartość oczekiwaną wygranej,
- strategie losowe tzn. „wybierz A z prawdopodobieństwem 0.4 lub 0.5” też dają dodatnią wartość oczekiwaną wygranej.

Realizacje klasyczne i kwantowe

– Zależne od kapitału gracza:

★ Originalna wersja paradoksu

★ Meyer, Blummer (J. Stat. Phys. **107**, 1-2 (2002)) – wykorzystanie kwantowe losowego błędzenia

★ Proponowanie sformułowanie kwantowe

– Zależne od historii gier

★ Parrondo, Harmer, Abbot (PRL **85**, 24 (2000)) – gra **B** jest realizowana przez 4 gry elementarne w zależności od wyników ostatnich dwóch gier

★ Flitney, Ng, Abbott (Physica A **314** (2002)) – zastąpienie rzutu monetą obtotem, **wymagana duża ilość qubitów!**

Proponowana implementacja paradoksu (1)

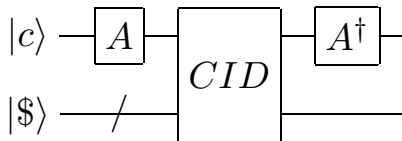
Proponowana realizacja należy do grupy zależnych od kapitału gracza. W schemacie wykorzystywane są następujące rejestry

- $|c\rangle$ – „kwantowa moneta” (rejestr jednoqubitowy),
- $|\$\rangle$ – kapitał (rejestr wieloqubitowy),
- $|o\rangle$ – rejestr pomocniczy (3 qubity).

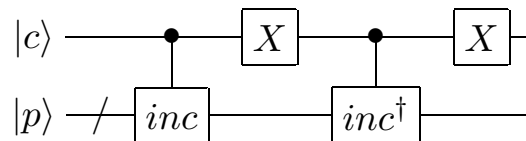
Proponowana implementacja paradoksu (2)

Gra **A** jest realizowana jako bramka jednopqubitowa. Dodatkowo wykorzystywana jest operacja CID, która zmienia stan rejestru w zależności od wyniku gry.

Gra A



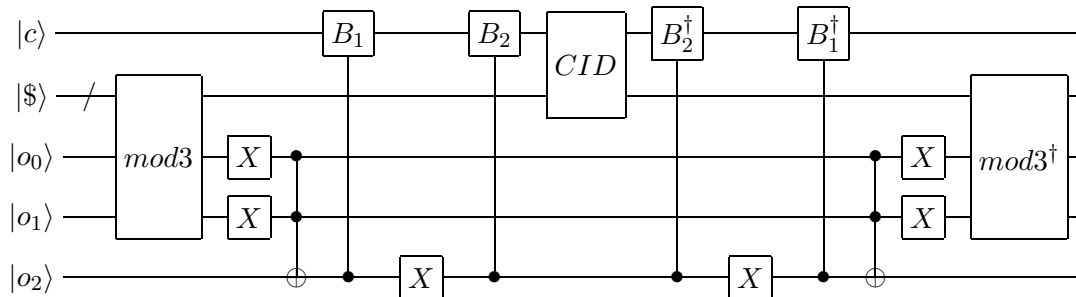
Conditional increment/decrement (CID)



Proponowana implementacja paradoksu (3)

Do realizacji gry **B** potrzebne są dwie bramki realizujące gry B_1 i B_2 oraz operacja $mod3$, realizująca sprawdzanie podzielności kapitału przez 3.

Gra B



Proponowana implementacja paradoksu (4)

Konstrukcja schematu

1. Przygotowanie rejestru $|c\rangle$ w stanie $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.
2. Przygotowanie rejestru $|\$ \rangle$ w stanie $|(2^{(n-1)} + \text{offset})\rangle$, gdzie *offset* jest małą liczbą całkowitą. Takie ustalenie rejestru jest niezbędne aby uniknąć arytmetycznego przepełnienia rejestru.
3. Wyzerowanie rejestru pomocniczego $|o_1, o_2, o_3\rangle: |000\rangle$.
4. Działanie bramkami A i B w pewnym wybranym porządku \mathbb{S} (strategii).

Proponowana implementacja paradoksu (5)

Pomiar

Symulacja pozwala na wgląd w wektor stanu rejestru. Korzystając z tej własności wartość oczekiwana jest liczona jako średnia wartość obserwabli σ_z w stanie $|\$\rangle\langle\$| = Tr_{|c\rangle\otimes|o\rangle}(|c, \$, o\rangle\langle c, \$, o|)$ otrzymanym po odrzuceniu qubitów monety i pomocniczych:

$$\langle\$| = Tr(\sigma_z|\$\rangle\langle\$|). \quad (1)$$

Symulacja

Zaproponowany schemat został zaimplementowany w języku QCL.

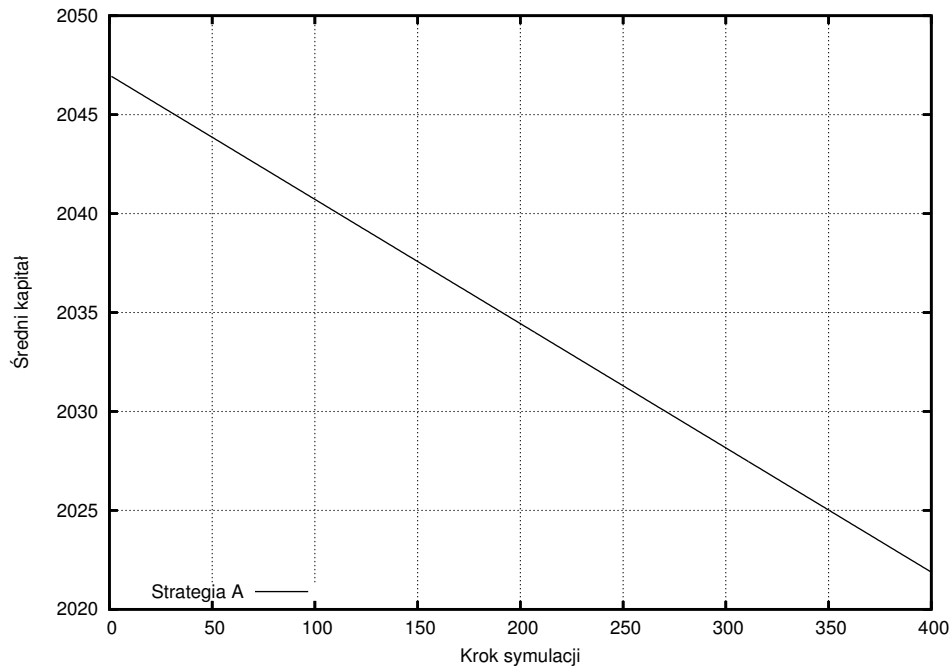
Parametry

δ_A	α_A	β_A	θ_A
0	1	0	$2(\frac{\pi}{2} + 0.01)$
δ_{B_1}	α_{B_1}	β_{B_1}	θ_{B_1}
0	1	0	$2(\frac{\pi}{10} + 0.01)$
δ_{B_2}	α_{B_2}	β_{B_2}	θ_{B_2}
0	1	0	$2(\frac{3\pi}{4} + 0.01)$

$$\text{offset} = -1$$

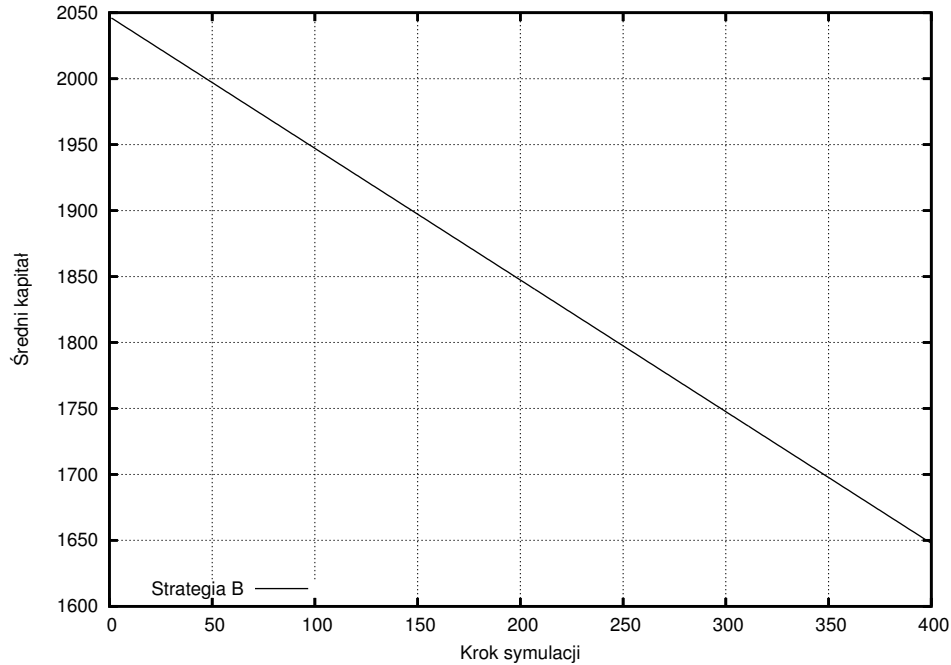
$$\begin{aligned}
 Ph(\xi) &= \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix}, \\
 R_y(\xi) &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\xi}{2}) & -\sin(\frac{\xi}{2}) \\ \sin(\frac{\xi}{2}) & \cos(\frac{\xi}{2}) \end{pmatrix}, \\
 R_z(\xi) &= \begin{pmatrix} e^{-i(\frac{\xi}{2})} & 0 \\ 0 & e^{i(\frac{\xi}{2})} \end{pmatrix} \\
 G(\delta_G, \alpha_G, \theta_G, \beta_G) &= \\
 &= R_z(\beta_G)R_y(\theta_G)R_z(\alpha_G)Ph(\delta_G)
 \end{aligned}$$

Przykładowe wyniki (1)



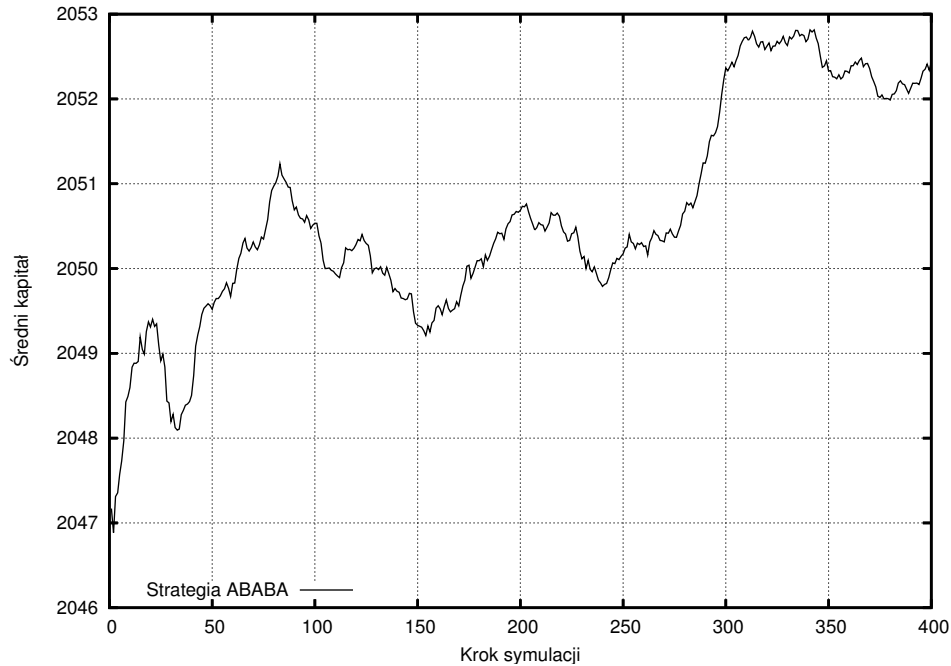
Strategia A^{400}

Przykładowe wyniki (2)



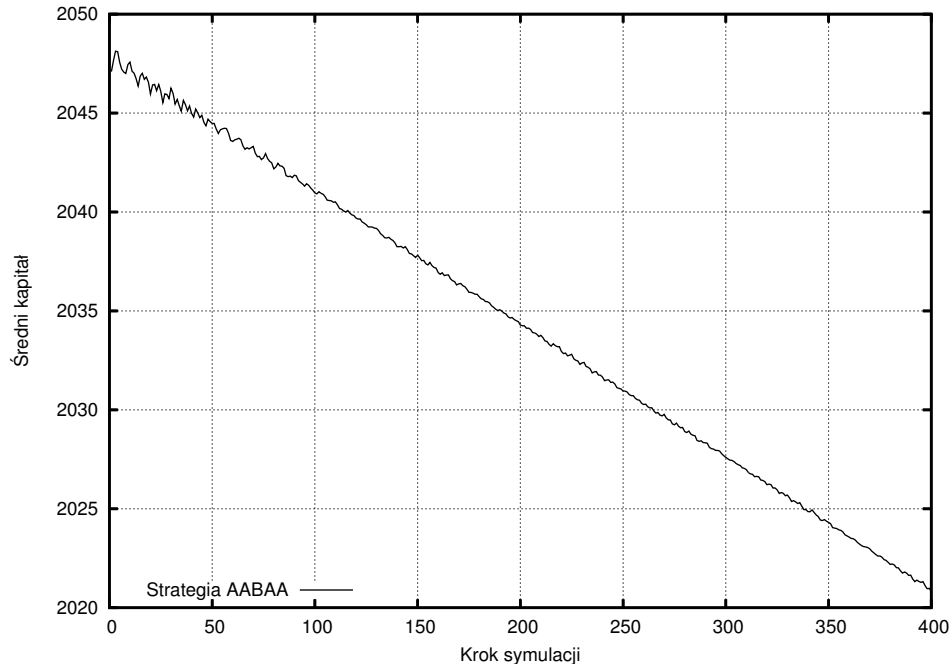
Strategia B^{400}

Przykładowe wyniki (3)



Strategia $(ABABA)^{400}$

Przykładowe wyniki (4)



Strategia $(AABAA)^{400}$

Podsumowanie i dalsze prace

- Zaproponowana implementacja potrzebuje tylko $O(\log(n))$ qubitów dla n -kroków (gier).
- Zostały znalezione „paradoksalne” strategie dla zaproponowanego schematu.
- ↪ Istnieje potrzeba przebadania tego schematu w sposób analityczny.
- ↪ Czy można wykorzystać paradoks Parrondo do walki z dekoherencją?

Literatura

- [1] G. P. Harmer, D. Abbott, *Parrondo's paradox*, Statistical Science, Vol. 14, No. 2, (1999), pp. 206-213
- [2] J. M. R. Parrondo, G. P. Harmer, D. Abbott, *New Paradoxical Games Based on Brownian Ratchets*, Phys. Rev. Lett. 85, 5226-5229 (2000).
- [3] A. P. Flitney, D. Abbot, *Quantum models of Parrondo's games*, Physica A, 324 (2003), pp. 152-156.
- [4] J. A. Mischczak, P. Gawron, *Quantum Implementation of Parrondo Paradox*, quant-ph/0502185. Przesłane do Fluctuation and Noise Letters.
- [5] Adelaide Parrondo's Paradox Group,
<http://www.eleceng.adelaide.edu.au/Groups/parrondo/>

Dziękuję za uwagę

<http://www.iitis.gliwice.pl/zksi/>