Gry kwantowe na łańcuchach spinowych

Jarosław Miszczak

we współpracy z

Piotrem Gawronem i Zbigniewem Puchałą

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN w Gliwicach

Plan wystąpienia

- Gry kwantowe służą do modelowania sytuacji w których dochodzi do konkurencji lub współdziałania osób posiadających możliwość operowania na danych zakodowanych w stanach kwantowych.
- Najprostszy przykład to kwantowy rzut monetą [Meyer, PRL 82(5), 1052 (1999)], który pokazuje, że warto uczyć się mechaniki kwantowej.
- Inne przykład to kwantowy dylemat więźnia [Eisert, Wilkens, Lewenstein, PRL, 83(15), 3077 (1999)].

Gra w orła i reszkę

Gra w orła i reszkę (ang. *penny flip game*, *bit flip game*) to gra dwuosobowa. Gra składa się z trzech ruchów polegających na obróceniu monety (F – *flip*) lub nie obróceniu monety (N – *not flip*). Pierwszy ruch należy do Alicji, drugi do Boba i trzeci znowu do Alicji.

Moneta jest na początku zwrócona reszką do góry. Bob wygrywa jeżeli reszka jest w tym samym stanie po zakończeniu gry.

	NN	NF	FN	FF
N	-1	1	1	-1
F	1	-1	-1	1

W powyższej tabelce 1 oznacza wygraną Alicji, a -1 wygraną Boba.

Kwantowe oszukiwanie

Załóżmy teraz, że moneta (bit) jest zakodowana jako qubit i że tylko jeden z graczy, a dokładnie tylko Alicja, o tym wie.

Alicja może operować na monecie operacjami unitarnymi. Na przykład, stosując bramkę Hadamarda, przygotowuje ona w pierwszym ruchu stan $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

Bob – niezależnie od wykonanego przez siebie ruchu – nie ma możliwosci zmiany tego stanu.

Zatem Alicja *zawsze* wygrywa.

Kwantowa gra w orła i reszkę

Załóżmy teraz, że obaj gracze mogą posługiwać się operacjami unitarnymi.

Prawdopodobieństwo wygrania przez Alicję i Boba wynosi wówczas odpowiednio

$$|\langle 1|U_{A_2}U_BU_{A_1}|0\rangle|^2 \quad \text{oraz} \quad |\langle 0|U_{A_2}U_BU_{A_1}|0\rangle|^2,$$

przy czym $|0\rangle$ koduje reszkę, a $|1\rangle$ – orła.

Jaki jest wówczas optymalny wybór strategii?

Kwantowa gra w orła i reszkę

Okazuje się, że gdy Bob stosuje strategię mieszaną X taką, że

$$\frac{1}{|X|}\sum_{U\in X} U\otimes U^{\star} = \int_{U(d)} U\otimes U^{\star} d\mu(U),$$

to osiągana jest równowaga Nasha.

Przykładem jest *strategia Pauliego*, zadana przez macierze

$$\{\mathbb{1}, i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$$

wykonywane z równym prawdopodobieństwem.

W dalszej części będziemy przyjmować, że Bob stosuje strategię Pauliego.

Implementacja na qubicie

W jaki sposób Alicja i Bob kontrolują wykonanie swoich ruchów na qubicie?

Muszą oni przygotować odpowiedni Hamiltonian, który będzie określał ewolucję układu w czasie każdego ich ruchu.

Implementacja na qubicie

Wykonanie operacji unitarnej jest równoważne zastosowaniu odpowiedniej sekwencji kontroli. Dowolna operacja z $\mathrm{SU}(2)$ to

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\theta & e^{i\psi}\sin\theta \\ -e^{-i\psi}\sin\theta & e^{-i\phi}\cos\theta \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi+\psi}{2}\sigma_z} e^{i\theta\sigma_y} e^{i\frac{\phi-\psi}{2}\sigma_z}.$$

Aby uzyskać strategię Pauliego każdy z graczy musi zastosować poniższe wartości parametrów kontrolnych.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
$\mathbb{1}$	0	0	0
$i\sigma_x$	$\pi/4$	$-\pi/2$	$\pi/4$
$i\sigma_y$	0	$-\pi/2$	0
$i\sigma_z$	$-\pi/4$	0	$-\pi/4$

Stały jest czas T jaki Alicja i Bob mają na wykonanie ruchów. Każdy z parametrów ze skalą $\frac{3}{T}$ określa Hamiltonian stosowany przez czas $\frac{T}{3}$.

Implementacja na łańcuchu spinów

Skoro można grać uczciwie na jednym qubicie, to pojawia się pytanie czy gracz który ma możliwość operowania na łańcuchu qubitów, ma szansę na poprawę swojego wyniku.

Implementacja na łańcuchu spinów

Interesują nas układy, które są opisane Hamiltonianem

$$H(t) = H_0 + H_c(t) \tag{1}$$

gdzie H_0 opisuje dryft, a H_c to Hamiltonian kontroli.

Dla układu dwóch qubitów (spinów $\frac{1}{2}$) mają one postać

$$H_0 = J(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

oraz

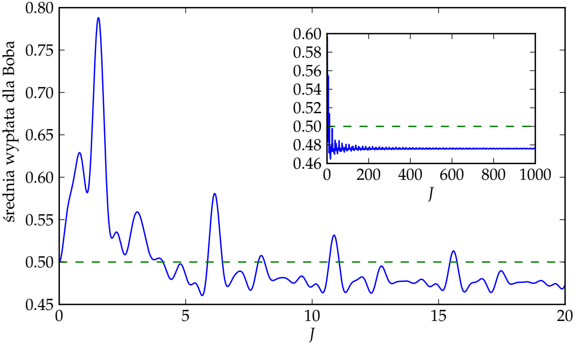
$$H_c(t) = h_y(t)\sigma_y \otimes \mathbb{1} + h_z(t)\sigma_z \otimes \mathbb{1}.$$

Implementacja na łańcuchu spinów

Alicja zdaje sobie sprawę z pełnej struktury układu, natomiast Bob wykonuje tą samą strategię co w przypadku gry na jednym qubicie.

Jeżeli Alicja chce w ten sposób oszukać Boba, to musi go najpierw przekonać, że układ wykorzystywany do gry jest uczciwy. Alicja może tego dokonać odpowiednio dobierając stałą J, odpowiedzialną za dryft.

Implementacja na łańcuchu spinów



Rysunek: Wartość oczekiwana wypłaty dla Boba jako funkcja stałej J. Zakładamy, że Alicja i Bob grają przy pomocy strategii Pauliego.

Przy $J \approx 0.41$ Bob wykonując serię testowych gier nie stwierdzi, że układ jest dwuqubitowy.

Implementacja na łańcuchu spinów

Zadaniem Alicji jest maksymalizacja wartości

$$P_A(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \langle 1 | \mathrm{tr}_2(|\psi_i^f\rangle\langle\psi_i^f|) | 1 \rangle \tag{2}$$

gdzie

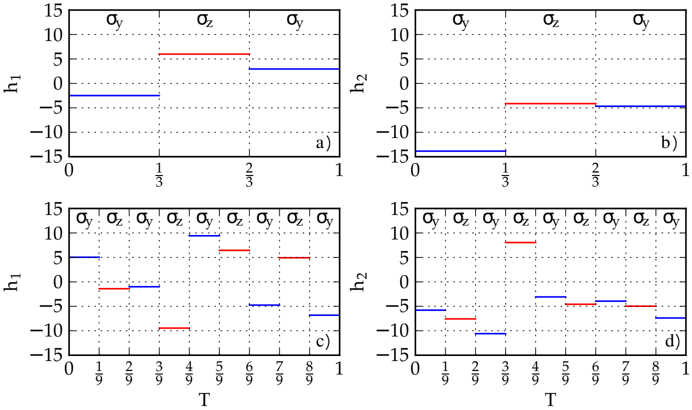
$$|\psi_i^f\rangle = U(\mathbf{h}_2) V_i U(\mathbf{h}_1) |00\rangle, \tag{3}$$

a macierze $U(\mathbf{h}_1)$ and $U(\mathbf{h}_2)$ są określone jako

$$U = \prod_{n=0}^{N-1} e^{-i\Delta t (H_0 + H_c(n\Delta t))} = U((N-1)\Delta t) \dots U(\Delta t) U(0), \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{h}_1$ i $\mathbf{h}_2$ to wektory parametrów kontrolnych definujących H_c w poszczególnych przedziałach czasu.

Optymalne wyniki dla Alicji



Rysunek: Najlepsze znalezione kontrole dla Alicji przy łańcuchu długości 2. Panele a) oraz b) pokazują wektory kontroli dające średni payoff Alicji równy 0.97. Panele c) oraz d) pokazują strategię, która wymaga wykonania 9 kontroli na ruch i daje średni payoff 0.999.

Oszukiwanie ze strony Boba

Przyjmijmy teraz, że to Bob oszukuje Alicję. Jeżeli będzie on wykorzystywał tylko jeden dodatkowy qubit, to jego szanse (przy stosowaniu krótkich sekwencji kontroli) wynoszą ≈ 0.713.

Długość łańcucha	2	3	4	5	6	7
Maksymalny payoff	0.713	0.920	0.925	0.901	0.901	0.951

Bob może natomiast poprawić znacznie swoje szanse, jeżeli będzie mógł dołączyć dłuższy łańcuch spinów.

Wnioski

- Nawet dodanie jednego qubitu pozwala Alicji uzyskać niemal pewność wygranej.
- Nieznajomość dokładnej struktury systemu wykorzystwanego do kwantowego przetwarzania informacji może być łatwo wykorzystana na naszą niekorzyść.
- W grach kwantowych każdy znajdzie coś dla siebie:

    - Z. Puchała, J.A.M, *Symbolic integration with respect to the Haar measure on the unitary group in Mathematica*, arXiv:1109.4244
    - P. Gawron, Ł. Pawela, *Quantum buffer on a spin chain*, w przygotowaniu.

Dziękuję za uwagę.