O rozróżnialności stanów kwantowych

Damian Markham **Jarosław Miszczak** Zbigniew Puchała
Karol Życzkowski

Kraków, 10.XII.2007

Problem dyskryminacji stanów

Wprowadzenie

Zadanie: Mając do dyspozycji zbiór stanów kwantowych zdecyduj który z tych stanów posiadamy.

Problem dyskryminacji stanów

Wprowadzenie

Zadanie: Mając do dyspozycji zbiór stanów kwantowych zdecyduj który z tych stanów posiadamy.

Metoda: Zacznij od klasycznego rozkładu prawdopodobieństwa i uogólnij na przypadek kwantowy.

Problem dyskryminacji stanów

Wprowadzenie

Zadanie: Mając do dyspozycji zbiór stanów kwantowych zdecyduj który z tych stanów posiadamy.

Metoda: Zacznij od klasycznego rozkładu prawdopodobieństwa i uogólnij na przypadek kwantowy.

Problem: Różne miary odległości między rozkładami prawdopodobieństwa w różny sposób rozróżniają stany kwantowe.

Miary odległości

Miary odległości dla stanów kwantowych

- Odległość Hilberta-Schmidta $D_{\mathrm{HS}}(A, B) = \sqrt{\mathrm{tr}(A - B)^2}$,

Miary odległości

Miary odległości dla stanów kwantowych

- Odległość Hilberta-Schmidta $D_{\mathrm{HS}}(A, B) = \sqrt{\mathrm{tr}(A - B)^2}$,
- odległość śladowa $D_{\mathrm{tr}}(A, B) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|A - B|$,

- Odległość Hilberta-Schmidta $D_{\mathrm{HS}}(A, B) = \sqrt{\mathrm{tr}(A - B)^2}$,
- odległość śladowa $D_{\mathrm{tr}}(A, B) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}|A - B|$,
- odległość Buresa $D_B(A, B) = \sqrt{2(1 - \mathrm{tr}|\sqrt{A}\sqrt{B}|)}$, która jest funkcją fidelity $F(A, B) = \left(\mathrm{tr}\left[\sqrt{\sqrt{A}B\sqrt{A}}\right]\right)^2$.

Odległość Buresa
Odpowiednik klasyczny

Klasyczny odpowiednik odległosci Buresa to

$$D_B(p, q) := \sqrt{2(1 - B(p, q))},$$

gdzie

$$B(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i q_i}$$

to współczynnik *Bhattacharayya* (klasyczny odpowiednik kwantowej fidelity).

Odległośc śladowa

Odpowiednik klasyczny

Pierwowzorem odległości śladowej jest odległość L_1 na przestrzeni wektorów prawdopodobieństwa.

$$D_{\mathrm{tr}}(p, q) := \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|,$$

$\{p_i\}_{i=1}^n$ i $\{q_i\}_{i=1}^n$ to rozkłady prawdopodobienstwa.

Miary rozróżnialności

Różne miary generują różne geometrie

- $\mathbb{C}^2$ (qubit) z odległością Hilberta-Schmidta (lub śladową) dają sferę Blocha,

Miary rozróżnialności

Różne miary generują różne geometrie

- $\mathbb{C}^2$ (qubit) z odległością Hilberta-Schmidta (lub śladową) dają sferę Blocha,
- średnica zbioru stanów – maksymalna odległość pomiedzy stanami to odpowiednio

$$D_B^{max} = \sqrt{2}, \; D_{\mathrm{tr}}^{max} = 1, \; D_{HS}^{max} = \sqrt{2},$$

Miary rozróżnialności

Różne miary generują różne geometrie

- $\mathbb{C}^2$ (qubit) z odległością Hilberta-Schmidta (lub śladową) dają sferę Blocha,
- średnica zbioru stanów – maksymalna odległość pomiedzy stanami to odpowiednio

$$D_B^{max} = \sqrt{2}, \; D_{\mathrm{tr}}^{max} = 1, \; D_{HS}^{max} = \sqrt{2},$$

- dla parzystego N w N wymiarowej przestrzeni stanów D_{HS} pomiędzy stanami $diag(0, \ldots, 0, N/2, \ldots, N/2)$ i $diag(N/2, \ldots, N/2, 0, \ldots, 0)$ reads $2/\sqrt{N}$ – ale te stany mają ortogonalne nośniki,

Dyskryminacja stanów

- Dwa stany mające rozłączne nosniki są oddalone o D^{max} (dla D_{tr} and D_B)

$$\mathrm{supp}(A) \perp \mathrm{supp}(B) \Leftrightarrow D_{\mathrm{tr}}(A,B) = 1 \Leftrightarrow D_B(A,B) = \sqrt{2},$$

Dyskryminacja stanów

- Dwa stany mające rozłączne nosniki są oddalone o D^{max} (dla D_{tr} and D_B)

$$\mathrm{supp}(A) \perp \mathrm{supp}(B) \Leftrightarrow D_{\mathrm{tr}}(A, B) = 1 \Leftrightarrow D_B(A, B) = \sqrt{2},$$

- dla $N > 2$ dwa stany mogą być dowolnie blisko w odległości D_{HS} i nawet wówczas mieć ortogonalne nośniki
$\Rightarrow$ D_{HS} nie jest dobrą miarą rorzóżnialności stanów.

Dyskryminacja stanów

Dokładna dyskryminacja stanów

Dyskryminacja stanów

Dokładna dyskryminacja stanów

- Nie jest możliwa dokładna dyskryminacja pomiędzy dwoma stanami czystymi jeżeli nie są one ortogonalne względem siebie!

Dyskryminacja stanów

Dokładna dyskryminacja stanów

- Nie jest możliwa dokładna dyskryminacja pomiędzy dwoma stanami czystymi jeżleli nie są one ortogonalne względem siebie!

- *Dwa stany mieszane A i B mogą być deterministycznie zdyskryminowane wtedy i tylko wtedy gdy ich nośniki nie pokrywają się.*

Rozróżnialność

- Rozróżnialność (ang. *distinguishability*) $\equiv$ odległość śladowa pomiędzy stanami[1]
- Odległość śladowa i fidelity są związane nierównością

$$1 - \sqrt{F(A,B)} \leq D_{\mathrm{tr}}(A,B) \leq \sqrt{1 - F(A,B)}$$

zatem $F(A,B) = 0$ pociąga za sobą iż stany A i B mogą być dokładnie rozróżnione.

[1] B.-G. Englert, PRL **96**, 040501 (1996).

Niech R będzie dowolnym podzbiorem wypukłym $\mathcal{M}_N$, Załóżmy, że istnieje simpleks $\Delta_k \subset R$ o boku długosci $D_{\mathrm{tr}}^{\mathsf{max}}$ (lub D_B^{max}) i R nie zawiera Δ_{k+1}.

Rozróżnialność

Konsekwencje geometryczne

Niech R będzie dowolnym podzbiorem wypukłym $\mathcal{M}_N$, Załóżmy, że istnieje simpleks $\Delta_k \subset R$ o boku długosci $D_{\mathrm{tr}}^{\mathsf{max}}$ (lub D_B^{max}) i R nie zawiera Δ_{k+1}.

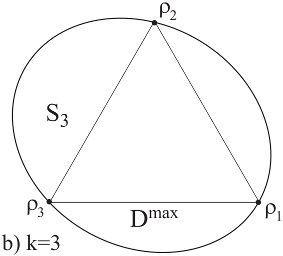
Wówczas maksymalna liczba stanów w R które mogą być deterministycznie zdyskryminowane wynosi to $k+1$.

Rozróżnialność

Przedstawienie geometryczne

Rozróżnialne stany które tworzą maksymalny simpleks o rozmiarze k z bokiem o długości D^{max}, względem odległości Buresa (lub śladowej).

Rozróżnialne stany które tworzą maksymalny simpleks o rozmiarze k z bokiem o długości $D^{\max}$, względem odległości Buresa (lub śladowej).



Odległość pomiędzy orbitami

Twierdzenie: Maksimum i minimum są osiągane dla stanów „klasycznych"

$$M(A,B) := \max_{U,V}(UAU^{\dagger}, VBV^{\dagger}) = D(p^{\uparrow}, q^{\downarrow}),$$

$$m(A,B) := \min_{U,V}(UAU^{\dagger}, VBV^{\dagger}) = D(p^{\uparrow}, q^{\uparrow}),$$

gdzie $p^{\uparrow}$ i $q^{\downarrow}$ to uporzadkowane ciągi wartości własnych A i B.

Klasyczne odległości pomiedzy $p^{\uparrow}$ i $q^{\downarrow}$ dają ograniczenia na odległosci między stanami.

Ograniczenia dla fidelity

Ograniczenie górne

Jest to wniosek z nierówności von Neumanna[2]

$$|\mathrm{tr} AB| \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)\sigma_i(B),$$

$\sigma_i(A)$ to uporządkowane wartości singularne A.

[2] Dowód w: L. Mirsky, *Monatshefte für Mathematik*, **79**, 303 (1973).

Ograniczenia dla fidelity

Ograniczenie górne

Jest to wniosek z nierówności von Neumanna[2]

$$|\mathrm{tr} AB| \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)\sigma_i(B),$$

$\sigma_i(A)$ to uporządkowane wartości singularne A.

Korzystając z równania $\mathrm{tr}|A| = |\max_U(UA)|$ otrzymujemy $\max_V \mathrm{tr}|\sqrt{p}V\sqrt{q}V^\dagger| = \max_{U,V} \mathrm{tr}|\sqrt{p}V\sqrt{q}V^\dagger U|$

[2]Dowód w: L. Mirsky, *Monatshefte für Mathematik*, **79**, 303 (1973).

Ograniczenia dla fidelity

Ograniczenie górne

Jest to wniosek z nierówności von Neumanna[2]

$$|\mathrm{tr} AB| \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)\sigma_i(B),$$

$\sigma_i(A)$ to uporządkowane wartości singularne A.

Korzystając z równania $\mathrm{tr}|A| = |\max_U(UA)|$ otrzymujemy $\max_V \mathrm{tr}|\sqrt{p}V\sqrt{q}V^\dagger| = \max_{U,V} \mathrm{tr}|\sqrt{p}V\sqrt{q}V^\dagger U|$

Wartość singularne $\sqrt{q}U$ to $\sqrt{q}$, zatem

$$\max_V \sqrt{F}(A,B) \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\sqrt{p}V)\sigma_i(\sqrt{q}W) = \sqrt{p^\uparrow} \cdot \sqrt{q^\uparrow}.$$

[2] Dowód w: L. Mirsky, *Monatshefte für Mathematik*, **79**, 303 (1973).

Ograniczenia dla fidelity

Ograniczenie dolne

Można pokazać, że dla $r, s > 0$ i macierzy dodatnich A i B mamy

$$(p^{\uparrow})^s (q^{\downarrow})^r \leq \mathrm{tr} A^s B^r \leq (p^{\uparrow})^s (q^{\uparrow})^r.$$

Jest to kwantowy odpowiednik nierówności Hardego-Littlewooda.

Ograniczenia dla fidelity

Ograniczenie dolne

Można pokazać, że dla $r, s > 0$ i macierzy dodatnich A i B mamy

$$(p^{\uparrow})^s (q^{\downarrow})^r \leq \mathrm{tr} A^s B^r \leq (p^{\uparrow})^s (q^{\uparrow})^r.$$

Jest to kwantowy odpowiednik nierówności Hardego-Littlewooda.

Ponieważ $\sqrt{F}(A, B) = \mathrm{tr}|\sqrt{A}\sqrt{B}| \geq \mathrm{tr}\sqrt{A}\sqrt{B}$ mamy

$$\sqrt{F}(A, B) \geq \sqrt{p^{\uparrow}}\sqrt{q^{\downarrow}}.$$

Ograniczenia dla fidelity

Ograniczenie dolne

Można pokazać, że dla $r, s > 0$ i macierzy dodatnich A i B mamy

$$(p^{\uparrow})^s (q^{\downarrow})^r \leq \mathrm{tr} A^s B^r \leq (p^{\uparrow})^s (q^{\uparrow})^r.$$

Jest to kwantowy odpowiednik nierówności Hardego-Littlewooda.

Ponieważ $\sqrt{F}(A, B) = \mathrm{tr}|\sqrt{A}\sqrt{B}| \geq \mathrm{tr}\sqrt{A}\sqrt{B}$ mamy

$$\sqrt{F}(A, B) \geq \sqrt{p^{\uparrow}}\sqrt{q^{\downarrow}}.$$

To daje nam górne ograniczenie na D_B

$$D_B(A, B) \leq D_B^C(p^{\uparrow}, q^{\downarrow}).$$

Ograniczenia dla odległości śladowej

Ograniczenie górne

Dowód tego ograniczenia bazuje na równości $\mathrm{tr}|A| = \max_U |\mathrm{tr}UA|$, która może być uogólniona dla izometrii częściowych (operatorów rzutowych rzędu $k < n$).

Ograniczenia dla odległości śladowej

Ograniczenie górne

Dowód tego ograniczenia bazuje na równości $\mathrm{tr}|A| = \max_U |\mathrm{tr}UA|$, która może być uogólniona dla izometrii częściowych (operatorów rzutowych rzędu $k < n$). Zgodnie z powyższą równością

$$\mathrm{tr}|A - B| = \max_U \left| \sum_{i=1}^{n} p_i \langle \mu_i | U | \mu_i \rangle - q_i \langle \nu_i | U | \nu_i \rangle \right|.$$

($\sum_{i=1}^{n} \langle \mu_i | U | \mu_i \rangle = \mathrm{tr}U$.)

Ograniczenia dla odległości śladowej

Ograniczenie górne

Dowód tego ograniczenia bazuje na równości $\mathrm{tr}|A| = \max_U |\mathrm{tr}\, UA|$, która może być uogólniona dla izometrii częściowych (operatorów rzutowych rzędu $k < n$). Zgodnie z powyższą równością

$$\mathrm{tr}|A - B| = \max_U |\sum_{i=1}^{n} p_i \langle \mu_i | U | \mu_i \rangle - q_i \langle \nu_i | U | \nu_i \rangle |.$$

$(\sum_{i=1}^{n} \langle \mu_i | U | \mu_i \rangle = \mathrm{tr}\, U.)$

Maksymalna wartość sumy po prawej stronie jest osiągana gdy weźmiemy n najwiekszych z p_i, q_i ze współczynnikiem $+1$ a n najmniejszych ze współczynnikime -1.

Ograniczenia dla odległości śladowej

Ograniczenie górne

Dowód tego ograniczenia bazuje na równości $\mathrm{tr}|A| = \max_U |\mathrm{tr}UA|$, która może być uogólniona dla izometrii częściowych (operatorów rzutowych rzędu $k < n$). Zgodnie z powyższą równością

$$\mathrm{tr}|A - B| = \max_U \Big|\sum_{i=1}^{n} p_i\langle\mu_i|U|\mu_i\rangle - q_i\langle\nu_i|U|\nu_i\rangle\Big|.$$

($\sum_{i=1}^{n}\langle\mu_i|U|\mu_i\rangle = \mathrm{tr}U$.)

Maksymalna wartość sumy po prawej stronie jest osiągana gdy weźmiemy n najwiekszych z p_i, q_i ze współczynnikiem $+1$ a n najmniejszych ze współczynnikime -1. Można to zapisać jako

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \max\{p_i, q_{n-i+1}\} - \min\{p_i, q_{n-i+1}\}\Big| = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_{n-i+1}|.$$

Ograniczenia dla odległości śladowej

Ograniczenie dolne

To ograniczenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia[3] dotyczącego wartości singularnych różnicy operatorów

$$\sum_{i=1}^{n} |\sigma_i(A) - \sigma_i(B)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A - B),$$

gdzie σ_i są uporządkowane niemalejąco.

---

[3] Horn, Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, 1991

Ograniczenia dla odległości śladowej

Ograniczenie dolne

To ograniczenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia[3] dotyczącego wartości singularnych różnicy operatorów

$$\sum_{i=1}^{n} |\sigma_i(A) - \sigma_i(B)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A - B),$$

gdzie σ_i są uporządkowane niemalejąco.

W przypadku stanów wartości singularne pokrywają się z wartościami własnymi.

[3] Horn, Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, 1991

Podsumowanie

- $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p^{\uparrow} q^{\downarrow}} \leq F(A, B) \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p^{\uparrow} q^{\uparrow}}$ co daje

$$D_B(p_i^{\uparrow}, q_i^{\uparrow}) \leq D_B(A, B) \leq D_B(p_i^{\uparrow}, q_i^{\downarrow})$$

  dla odległości Buresa

- dla odległości śladowej mamy

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i^{\uparrow} - q_i^{\uparrow}| \leq \mathrm{tr}|A - B| \leq \sum_{i=1}^{n} |p_i^{\uparrow} - q_i^{\downarrow}|$$

Podsumowanie

- Odległość Hilberta-Schmidta nie jest dobrą miarą rozróżnialności stanów,

Podsumowanie

- Odległość Hilberta-Schmidta nie jest dobrą miarą rozróżnialności stanów,
- natomiast odległość Buresa i odległośc śladowa pozwalają na ustalenie czy mozliwa jest deterministyczna dyskryminacja stanów.

Podsumowanie

- Odległość Hilberta-Schmidta nie jest dobrą miarą rozróżnialności stanów,
- natomiast odległość Buresa i odległośc śladowa pozwalają na ustalenie czy mozliwa jest deterministyczna dyskryminacja stanów.
- Szukając stanów rozróżnialnych stanów w unitarnie niezmienniczym podzbiorze wystarczy analizować „klasyczne" macierze gęstości.

Dziękuję za uwagę!

Więcej szczegółów w arXiv:0711.4286