

Obliczenia inspirowane Naturą

Wykład 04 – Geometria fraktalna

Jarosław Miszczak

IITiS PAN Gliwice

31/03/2016

- 1 Fraktale
 - Określenie nieformalne
- 2 Przykłady fraktali
 - Funkcja Weierstrassa
 - Zbiór Mandelbrota
- 3 Wymiar
 - Określenie nieformalne
 - Wymiar pudełkowy
 - Inne definicje wymiaru
- 4 Definicja fraktali
- 5 Wykładnik Hursta

Określenie nieformalne

W jaki sposób określa się fraktale?

- 1 Są to obiekty określone zależnością rekurencyjną, a nie wzorem.
- 2 Mają one cechę samopodobieństwa, czyli każda część wygląda jak pomniejszona całość.
- 3 Ich wymiar nie jest liczbą całkowitą.

Określenie nieformalne

... nic nie wyjaśnia

- 1 Niektóre fraktale można opisać zwartym wzorem. Przykład to zbiór Cantora, który zawiera punkty o współrzędnych zadanych wzorem

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

dla $a_k \in \{1, 2\}$.

- 2 Odcinek składa się z części które wyglądają dokładnie tak samo jak cały odcinek.
- 3 Niektóre fraktale mają wymiar całkowity. Przykładem jest piramida Sierpińskiego.

Pierwsze przykłady

Pierwsze przykłady fraktali pojawiły się przez wymyśleniem nazwy fraktal.

- 1872, Karl Weierstrass – przykład funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej
- Inne przykłady:
 - 1874, Henry Smith; 1883, Georg Cantor – zbiór Cantora;
 - 1904, Helge von Koch – krzywa (śnieżynka) Kocha;
 - 1916, Wacław Sierpiński – dywan Sierpińskiego;

Zwykle były to obiekty problematyczne z matematycznego punktu widzenia.

Przykłady fraktali

Funkcja Weierstrassa

W roku 1872 Karl Weierstrass podał przykład ciągłej funkcji rzeczywistej która nie posiada pochodnej. Oryginalnie zdefiniowana była w postaci szeregu Fouriera

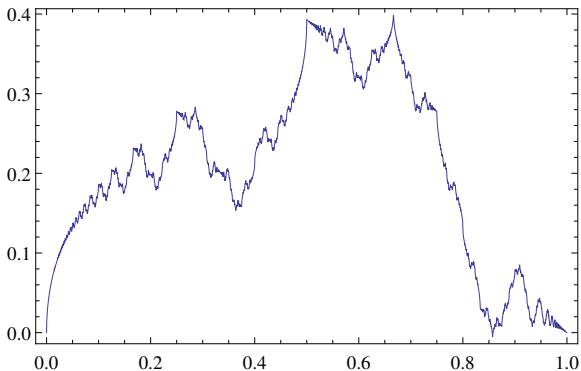
$$w_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \text{ dla } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Równoważne określenie w postaci szeregu:

$$w_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k^a x}{\pi k^a}$$

Przykłady fraktali

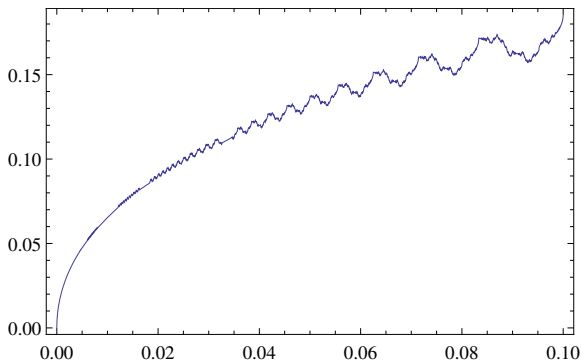
Funkcja Weierstrassa



Funkcja Weierstrassa na $[0, 1]$ dla $a = 2$
(<http://mathworld.wolfram.com/WeierstrassFunction.html>)

Przykłady fraktali

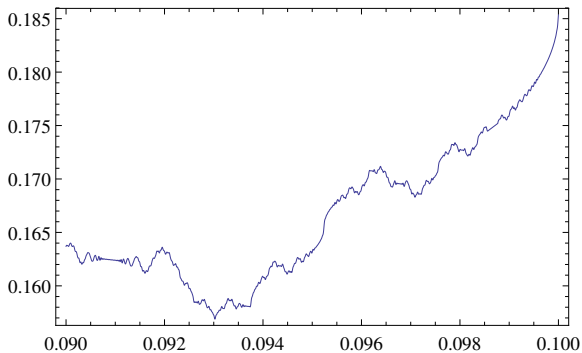
Funkcja Weierstrassa



Funkcja Weierstrassa na $[0, 0.1]$ dla $a = 2$

Przykłady fraktali

Funkcja Weierstrassa



Funkcja Weierstrassa na $[0.9, 0.1]$ dla $a = 2$

Przykłady fraktali

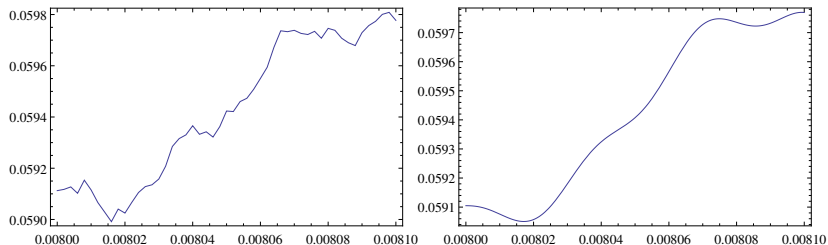
Funkcja Weierstrassa – wzór dla liczb wymiernych

Dla liczb wymiernych funkcja Weierstrassa ma postać

$$w\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{4q} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\sin\left(k^2 \frac{p}{q} \pi\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2q}\right)}$$

Przykłady fraktali

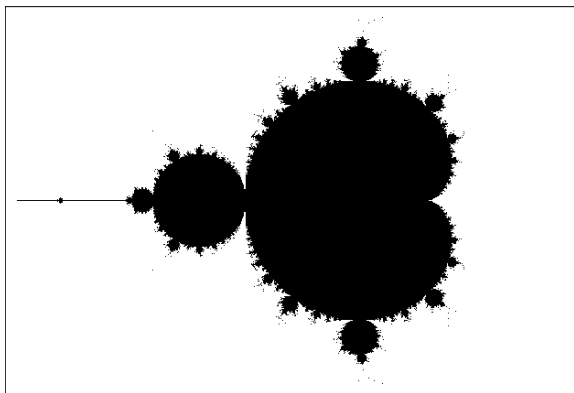
Funkcja Weierstrassa – wzór dla liczb wymiernych



Funkcja Weierstrassa na $[\frac{80}{10000}, \frac{81}{10000}]$ w wersji dla funkcji wymiernych (z krokiem $\frac{1}{50000}$) i interpolacja szeregu.

Zbiór Mandelbrota

Wersja czarno-biała



Rozdzielczość 0.005 na $[-2, 1] \times [-1, 1]$, 50 iteracji.

Zbiór Mandelbrota

Definicja

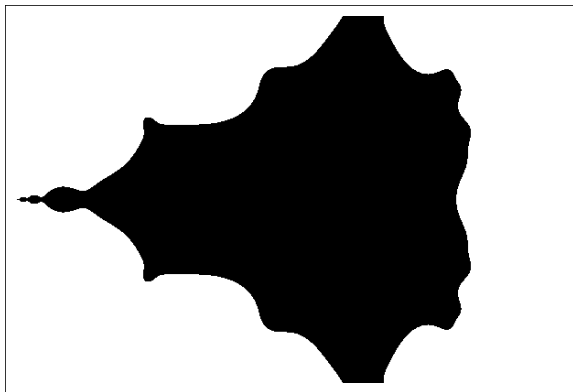
Zbiór Mandelbrota jest określony poprzez własności funkcji $z(k) = z^2(k-1) + z_0$ za warunkiem początkowym $z(0) = z_0$.

- jest zdefiniowany na płaszczyźnie zespolonej;
- zawiera punkty dla których zachodzi

$$\{z_0 : \forall_k |z^2(k)| < 2\}$$

Zbiór Mandelbrota

Przybliżenie



Piąta iteracja zbioru Mandelbrota.

Zbiór Cantora

Konstrukcja

- odcinek $[0, 1]$ podziel na trzy części
- usuń odcinek $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pozostawiając jego punkty brzegowe
- powtórz powyższe kroki dla odcinków $0, \frac{1}{3}$ i $[\frac{2}{3}, 1]$

Zbiór Cantora

Przykład



Piąta iteracja

Zbiór Cantora

Własności

- jest nieprzeliczalny – można zbudować surjekcję na $[0, 1]$;
- jest miary zero;

Zbiór Cantora

Uogólnienia

Dwa uogólnienia na płaszczyźnie to:

- dywan Sierpińskiego –
- pył Cantora –

Trójkąt Sierpińskiego

Konstrukcja

- trójkąt równoboczny podzieli na cztery równe trójkąt równoboczne;
- usuń środkowy trójkąt;
- zastosuj powyższe kroki do pozostałych trzech trójkątów.

Trójkąt Sierpińskiego

Przykład



Śnieżka Kocha

Konstrukcja

- podziel odcinek na trzy równe części
- narysuj trójkąt równoboczny o podstawie będącej środkowym odcinkiem
- usuń podstawę trójkąta

Wymiar

Nieformalnie

Wymiar

Liczba współrzędnych które trzeba podać aby określić obiekt.

Na początku XX w. określenie czym jest wymiar było jednym z najważniejszych problemów w matematyce.

Wymiar

Wymiar pudełkowy (fraktalny)

Wymiar pudełkowy

Określenie wymiaru pudełkowego pochodzi od Hermana Mińkowskiego.

Interesuje nas określenie wymiaru obiektu F zanurzonego w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

- korzystamy z miarki o boku ϵ (np. odcinka, kwadratu, itd.);
- przez $N_\epsilon(F)$ oznaczamy minimalną ilość miarek o boku ϵ potrzebną do nakrycia obiektu F ;

Wymiar

Wymiar pudełkowy (fraktalny)

W przybliżeniu zachodzi zależność

$$N_\epsilon(F) \sim \frac{1}{\epsilon^d},$$

gdzie liczbę d można traktować jako wymiar obiektu F .
Dokładną wartość d uzyskujemy przechodząc do granicy z rozmiarem miarki,

$$\dim_B(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(F)}{\log 1/\epsilon}$$

Wymiar

Wymiar pudełkowy (fraktalny) – przykład

Lewis Richardson (1961)

Pomiar długości linii brzegowej Wysp Brytyjskich.

- długością linii brzegowej $L(\lambda)$ jest długość najkrótszej łamanej złożonej z odcinków o długości λ , takiej, że punkty leżą zawsze na brzegu wyspy,

$$L(\lambda) = \lambda N(\lambda)$$

- dla krzywych gładkich, przy $\lambda \mapsto 0$, istnieje granica $L(\lambda)$;
- okazuje się, że wraz z malejącym λ ilość odcinków $N(\lambda)$ rośnie szybciej niż dla krzywych gładkich,

$$N(\lambda) \sim \lambda^{-d},$$

gdzie $d > 1$.

Wymiar

Wymiar pudełkowy (fraktalny) – przykład

- Dla zachodniego wybrzeża Wysp Brytyjskich zachodzi $d \approx 1.25$.
- Oczywiście w tym przypadku nie jest możliwe dokonanie przejścia granicznego z długością miarki, $\lambda \mapsto 0$.

Początek badania fraktali

Eksperyment Richardsona stał się popularny dzięki pracy Benoît Mandelbrota *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* opublikowanego w Science w 1967 roku.

Wymiar

Wymiar Hausdorffa

Określenie wprowadzone w 1918 przez Feliksa Hausdorffa.

Pokryciem \mathcal{B} zbioru $F \subset \mathbf{R}^n$ nazywamy rodzinę kul, których suma zawiera F . Średnicą pokrycia nazywamy średnicę największej z kul,

$$\alpha(d, \epsilon) = \inf_{\mathcal{B}} \sum_{A \in \mathcal{B}} (\text{diam } A)^d,$$

gdzie $\text{diam } A$ to maksymalna odległość między elementami A .

Wymiar

Wymiar Hausdorffa

Wymiar Hausdorffa

Istnieje dokładnie jedna liczba d_0 , taka, że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(d, \epsilon) = \begin{cases} \infty & \text{dla } d < d_0 \\ 0 & \text{dla } d > d_0 \end{cases}$$

Liczę d_0 nazywamy wymiarem Hausdorffa zbioru F i oznaczamy $\dim_H(F)$.

Wymiar

Wymiar Hausdorffa – własności

Własności wymiaru Hausdorffa:

- jeżeli $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}^n$, to $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$;
- jeżeli $A \subseteq \mathbf{R}^n$ i $B \subseteq \mathbf{R}^n$, to
 $\dim_H(A) + \dim_H(B) \leq \dim_H(A \times B)$;
- dla sumy $\dim_H(A \cup B) = \max\{\dim_H A, \dim_H B\}$;
- dla zbioru A otwartego w \mathbf{R}^n , $\dim_H A = n$;
- dla podzbiorów \mathbf{R}^n mających zerową miarę Lebesgue'a, wymiar Hausdorffa może przybierać wartości od 0 do n .

Wymiar

Wymiar Hausdorffa – własności

- Każdy zbiór na płaszczyźnie można z dowolną dokładnością przybliżyć zbiorem o zadanym wymiarze Hausdorffa.
- Na pytanie *Czy zbiór przedstawiony na rysunku jest fraktalem?* można zawsze odpowiedzieć twierdząco.

Wymiar topologiczny

Wymiar topologiczny

Formalnie wprowadził to pojęcie Eduard Čech bazując na wynikach Henriego Lebesguea.

Wymiar

Wymiar topologiczny

Niech F będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej. Wymiar topologiczny zbioru F definiujemy jako:

- $\dim_{\mathcal{T}}(\emptyset) = -1$;
- $\dim_{\mathcal{T}}(F) = n$ wtedy i tylko wtedy gdy, dla każdego $x \in F$ i każdego otoczenia U_x punktu x , istnieje $V \subset U_x$ taki, że
 - $\dim_{\mathcal{T}}(\delta V \cap F) \leq n - 1$;
 - liczba n jest najmniejszą liczbą naturalną dla której zachodzi powyższa nierówność.

Wymiar

Wymiar topologiczny – własności

Własności wymiaru topologicznego:

- Dla zbiorów niepustych wymiar topologiczny jest zawsze liczbą całkowitą nieujemną.
- Jest zawsze mniejszy lub równy wymiarowi Hausdorffa.
- Jest niezmiennikiem topologicznym – dwie homeomorficzne przestrzenie mają ten sam wymiar topologiczny.

Definicja fraktali

Fraktal

Fraktalem nazywamy zbiór, którego wymiar topologiczny jest różny od wymiaru Hausdorffa.

Definicja fraktali

Przykłady

Co jest a co nie jest fraktalem?

- Gwiazdka Kocha jest fraktalem, ale jej wnętrze nie jest fraktalem.
- Zbiór Mandelbrota nie jest fraktalem, ale jego brzeg jest fraktalem.
- Zbiór Cantora jest fraktalem, ale istnieją zbiory homeomorficzne z nim które nie są fraktalami.
- Fraktalem jest piramida Sierpińskiego, chociaż jej wymiar jest liczbą całkowitą.

Definicja fraktali

Przykłady

Wymiary wybranych fraktali:

- funkcja Weierstrass: $\frac{3}{2}$ (brak dowodu)
- wybrzeże Norwegii: 1.52
- złoty smok: $\log_{\varphi} \varphi$
- kalafior: 2.33
- powierzchnia mózgu: 2.79
- powierzchnia płuc: 2.97

Więcej na

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

Wykładnik Hursta

Odpowiednik wymiaru fraktalnego w analizie szeregów czasowych.

- 1951, Harold Edwin Hurst – pomiary długozakresowych tendencji w poziomach wody.
- Daje on miarę nieuporządkowania danych (sygnału czasowego).

Wykładnik Hursta

Definicja

Zadany jest ciąg danych pozyskiwanych w czasie $\psi(t)$, gdzie t jest zmienną dyskretną. Średnia i odchylenie standardowe sygnału w przedziale $(0, \tau)$ są zdefiniowane jako

$$\mu_{\tau}[\psi(t)] = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \psi(t)$$

$$S_{\tau}[\psi(t)] = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (\psi(t) - \mu_{\tau}[\psi(t)])^2}$$

Wykładnik Hursta

Definicja

Dla sygnału możemy określić akumulowane odchylenie standardowe jest zdefiniowane jako

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t (\psi(u) - \mu_t[\psi])$$

oraz jego zakres na przedziale $(0, \tau)$

$$R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau)$$

dla $1 \leq t \leq \tau$.

Analiza R/S

Analiza R/S to badanie zależności stosunku R/S od τ .

Wykładnik Hursta

Przykład

Efekt korelacji w danych:

- Jeżeli nie ma korelacji między kolejnymi wartościami sygnału, to

$$R/S = \sqrt{\frac{\pi}{2}\tau}.$$

- Hurst badał zmiany poziomu wód w Nilu i w takim przypadku

$$R/S = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H,$$

gdzie $H = 0.73 \pm 0.09$. Zależność tą nazywamy prawem Hursta, a liczbę H określa się mianem wykładnikiem Hursta.

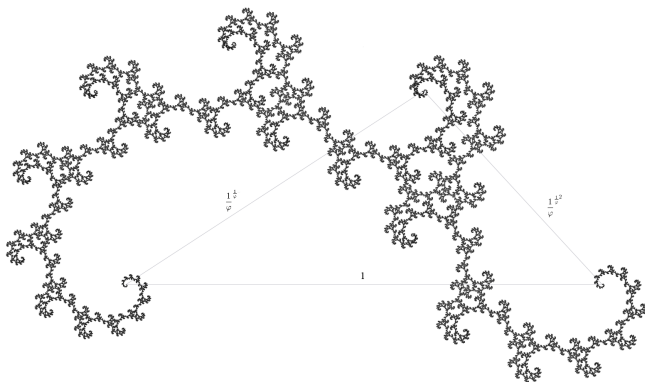
Związek z wymiarem fraktalnym

- wykładnik Hurst jest miarą zależności długozakresowych, natomiast wymiar fraktalny jest własnością lokalną
- w przypadku danych samoafinicznych (skalujących się różnie w różnych kierunkach), zachodzi zależność

$$\dim_B + H = n + 1$$

Dzień Sierpińskiego na Politechnice Śląskiej – 02/04/2016

<http://fraktal.polsl.pl/>



(Złoty Smok, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Phi_glito.png)